Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ивановская государственная сельскохозяйственная академия имени Д.К. Беляева»

ИНЖЕНЕРНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТЕРЕНТЬЕВ В.В.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания по выполнению лабораторной работы для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06 «Агроинженерия» (магистратура)

ИВАНОВО 2018

Автор: ***Терентьев Владимир Викторович,*** кандидат технических наук,
доцент кафедры технического сервиса и механики

Рецензенты:
заведующий кафедрой механики и инженерной графики ФГБОУ ВО ИГХТУ
д.т.н., профессор ***Колобов М.Ю.***
Генеральный директор ООО «Агросервис +» **Муравьев Д.Н.**

Терентьев В.В.
Математическое моделирование технологических процессов/ Методические указания - Иваново: ФГБОУ ВО Ивановская ГСХА, 2018.- 29 с.

Методические указания предназначены для обучающихся очной и заочной форм обучения, по направлению подготовки 35.04.06 «Агроинженерия», уровень высшего образования - магистратура.

Илл.- 1 Табл.– 7 Приложений – 2

Рассмотрено и одобрено методической комиссией инженерного факультета (протокол № 4 от 29 сентября 2018 года)

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование — это замена объекта, подлежащего исследованию (оригинала), другим объектом (моделью), исследование модели и распространение результатов этого исследования на оригинал.

Модель - это объект заменитель, который в определенных условиях может заменить объект оригинал, воспроизводя интересующие исследователя свойства и характеристики оригинала, причем объект заменитель имеет существенные преимущества и удобства:

- наглядность (обозримость);
- доступность испытаний;
- легкость оперирования с ним.

Моделирование объектов преследует различные цели.

Главная из них - это предсказание новых результатов или поведения объекта в некоторых условиях. Предсказания могут относиться к условиям, которые по всей вероятности, будут иметь место в некоторый момент в будущем, а также к объектам, непосредственный эксперимент, которыми невозможен или дорог.

Другой важной целью математического моделирования является углубление понимания объекта или явления. Именно эту роль и играют многие физические теории, хотя на их основе делаются также и прогнозы.

Умение работать с математической моделью заключается в её анализе аналитическими и численными методами.

Аналитические методы традиционны в математике. Их достоинством является наглядность результата. Обычно это формула для определения искомой величины. Аналитические решение существуют не для всех задач, а во многих случаях они слишком сложны. В таких случаях математические модели исследуют численными методами с помощью ЭВМ. Описание объекта с помощью математических выражений называется математической моделью.

Классификация моделей:

1. Познавательные (теоретические) - являются формой организации и представлением знании, средством соединения новых знаний с уже имеющимися.

2. Прагматические (практические) - являются средством организации практических действий.

3. Статические (не изменяющиеся во времени) – например, план установки оборудования.

4. Динамические (изменяющиеся во времени) - процесс изменения состояния явления вещества, объекта. Например, три состояния вещества: пар, вода, лёд.

Способы воплощения моделей.

Для построения модели в распоряжении исследователя имеются: средства окружающего внешнего мира средства самого сознания.

В зависимости от способа воплощения модели подразделяются на: абстрактные и материальные. Абстрактные модели - это идеальные конструкции, построенные средствами мышления (языковые конструкции).

Особенности языковых конструкций:

Достоинства: возможность иерархического построения модели по принципу “слово - предложение – текст”, что позволяет любую ситуацию промоделировать с достаточной для практических целей точностью, при этом важную роль имеют неязыковые формы мышления (интуиция, эмоции, озарение, подсознание).

Недостатки: обладают многозначностью, многовариантностью и т. д.

Материальные модели - это реальные конструкции, выполняющие определенные функции (вещественные конструкции), чтобы вещественная модель могла быть отображением оригинала. Между ними должны быть установлены отношения подобия, схожести.

Способы установления подобия:

- физическое (соответствие материалов);

- геометрическое (отношение размеров модели кратны размерам объекта).

Любые модели являются целевым отображением объекта.

Особенности моделей:

- целостность;
- относительная обособленность от окружающей среды;
- подчиненность определенной цели;
- ингерентность (соответствие культурной среде);
- адекватность (соответствие в мере, достаточной для достижения цели, требование полноты, точности и достоверности).

Математическая модель - абстракция реального мира или объекта, в которой интересующие исследователя отношения между реальными явлениями заменены соответствующими отношениями между математическими объектами.

Способы определения математических моделей:

1. Аксиоматический - определяется непротиворечивым набором аксиом.
2. Конструктивный - определяется по реальным размерам предмета.

Классификация математических моделей:

- познавательные;
- прагматические;
- статические;
- динамические;
- квазистатические (t —> oo)

По виду информации:

- детерминированные;
- непрерывные (дискретные);
- фиксированные;
- изменяющиеся.

По форме представления:

- инвариантные;
- аналитические;

- в виде схем, диаграмм, таблиц.

Модели (математические) могут использоваться для проектирования (синтеза), анализа (исследования) и оценки функционирования систем (реальных объектов).

В настоящее время моделирование используется для исследования разнообразных систем, в частности, городских, экономических, коммерческих, производственных, сельскохозяйственных, биологических, социальных, транспортных систем, систем здравоохранения и др.

Численное решение системы линейных уравнений

Для численного решения системы линейных уравнений обычно применяются алгоритмы, являющиеся модификациями метода Гаусса.

Методом Гаусса называют точный метод решения невырожденной системы линейных уравнений, состоящий в том, что последовательным исключением неизвестных систему:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} i_j = u_k, k = 1,2,...,n \tag{2}$$

приводят к эквивалентной системе с треугольной матрицей,

$$\begin{aligned} i_1 + c_{12}\, i_2 + c_{13}\, l_3 + c_{1n}\, i_n &= v_1 \\ i_2 + c_{23}\, i_3 + \ldots + c_{2n}\, i_n &= v_2 \\ i_n &= v_n, \end{aligned} \tag{3}$$

решение которой находят по рекурентным формулам

$$i_j = d_j - \sum_{l=k+1}^{n} c_{je} i_e, i_n = v_n, k = n-1, n-2...1. \tag{4}$$

Одной из модификаций метода Гаусса является схема с выбором главного элемента. Пусть исходная система имеет вид

$a_{11}\, i_1 + \ldots + a_n\, i_n = u_1$,

$a_{21}\, i_1 + \ldots + a_{2n}\, i_n = u_2$,

$a_{n1}\, i_1 + \ldots + a_{nn}\, i_n = u_n$,

Предположим, что $a_{11} \neq 0$ и разделим обе части первого уравнения системы на a_{11}. В результате получим

$$i_1 + c_{12}\, i_2 + \ldots + c_{1n}\, i_n = v_1, \qquad (6)$$

где $c_{1j} = a_{1j}/a_{11}, j = 2, 3, \ldots n$

$v_1 = u_1/a_{11}$.

С помощью полученного уравнения исключаем из всех остальных уравнений системы члены, содержащие i_1. После чего получим систему, порядок которой на единицу меньше, чем исходный

$$a'_{22} i_2 + \ldots + a'_{2n} i_n = u'_2 \qquad (7)$$

$$a'_{2n} i_2 + \ldots + a'_{nn} i_n = u'_n,$$

где $a'_{kj} = a_{kj} - a_{kl}\, a_{lj}, i, j = 2, 3, \ldots n$

$u'_k = u_k - a_{kl} \cdot u_1, k = 2, 3, \ldots n.$

Повторяя описанные преобразования, получим систему с треугольной матрицей (3).

Полученная система эквивалента исходной, но решать её легко. В самом деле, из последнего уравнения находим i_n, подставляя его в предпоследнее — найдем i_{n-1} и т. д.

Вычисления по методу Гаусса выполняются в два этапа.

Первый этап называется прямым ходом метода. На первом этапе исходную систему преобразуют к треугольному виду. Второй этап называется обратным ходом. На втором этапе решают треугольную систему, эквивалентную исходной.

Коэффициенты a_{11}, a_{22}, …, называют ведущими элементами. На каждом шаге предполагалось, что ведущий элемент отличен от нуля. Если это не так, то в качестве ведущего можно использовать любой другой элемент, как бы переставив уравнения системы (5).

Особенностью численного счета является возникновение погрешностей округления. Так если k-ый ведущий элемент мал, то при делении на него и вычитания k-го уравнения из последующих, возникают большие погрешности округления.

Особенностью метода Гаусса с выбором главного элемента является такая перестановка уравнений, чтобы на k-ом шаге ведущим элементом оказывался наибольший по модулю элемент k-го столбца.

Фрагмент программы на языке Бейсик, реализующий описанный метод приведен в приложении Б.

Математические модели динамических объектов

Моделирование динамического объекта начинается с установления его типа: стационарной или нестационарной, линейный или нелинейный.

Линейные стационарные объекты описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Если коэффициенты линейных дифференциальных уравнений являются функциями независимых переменных, то объект относится к классу линейных нестационарных.

Нелинейные стационарные объекты описываются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, а нелинейные нестационарные — нелинейными уравнениями с переменными коэффициентами.

В изучаемом курсе рассматриваются модели линейных объектов.

Аналитическое представление модели динамического объекта в виде дифференциального уравнения не является единственно возможным. Для систем автоматического регулирования принято представление модели в виде типовых линейных и нелинейных звеньев и их передаточных функций.

Примером линейного стационарного динамического объекта является электрическая цепь, содержащая активные и реактивные элементы, (рисунок 1).

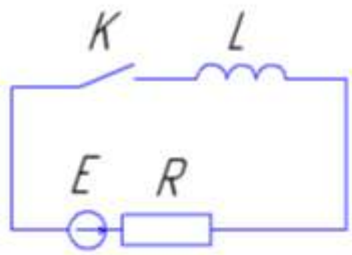


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Переходный процесс при замыкании ключа в такой цепи описывается дифференциальным уравнением

$$L\frac{di}{dt} + iR = E, \tag{8}$$

в котором i и E являются функциями времени, а параметры цепи L и R — постоянными коэффициентами.

В качестве другого примера рассмотрим движение механизма, имеющего приведенный момент инерции I и момент нагрузки $M_{нагр}$, в общем случае переменный. Механизм приводится в движение моментом двигателя М, (рисунок 2)

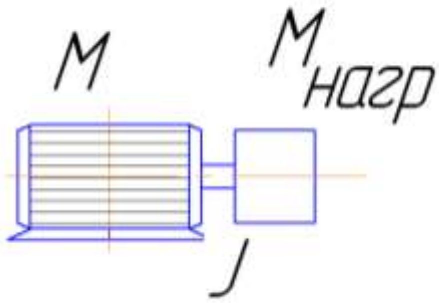


Рисунок 2- Расчётная схема механизма

Изменение угловой скорости механизма ω описывается дифференциальными уравнениями, называемыми уравнениями движения

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - M_{нагр.}$$

Математическими моделями объектов в приведенных примерах являются дифференциальные уравнения первого порядка. Такие уравнения имеют семейства решений. Чтобы выбрать одно решение из многих, необходимо знать начальное значение функции, то есть ее значение в начальный момент времени.

В общем виде можно записать

$$y' = f\ (y, t)$$

$$y\ (t_0) = y_0. \tag{10}$$

Задача определения значений *y* для будущих значений $t>t_0$ называется задачей Коши.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Лишь очень немногие дифференциальные уравнения могут быть решены точно, аналитическими методами, и поэтому обычно необходимо приближать решение численными методами.

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = f\ (y, t)$, удовлетворяющее начальному условию $y\ (t_0) = y_0$. Численное решение задачи состоит в нахождении значений y_1, y_2, $\ldots y_n$ функции (y(t) в точках t_1, t_2, $\ldots t_n$). Точки t_1, t_2, $\ldots t_n$ называют узлами сетки, а расстояние между ними — шагом. Часто решение выполняют с постоянным шагом, тогда

$$t_1 = t_0 + ih, \tag{11}$$

где i = 1, 2, ... n,

h — шаг сетки.

Рассмотрим два метода. Одношаговым называется метод, в котором для расчетов следующей точки требуется информация только о последней вычислительной точке. Первый из рассматриваемых методов — метод Эйлера.

В методе Эйлера каждое следующее значение функции вычисляется по предыдущему по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(\ y_i, t_i), \ i = 1, 2, \ldots n, \tag{12}$$

Фрагмент программы на языке Бейсик, реализующий метод Эйлера приведен в приложении Б.

Другим распространенным одношаговым методом является метод Рунге-Кутта. В этом методе величину y_{i+1} вычисляют по следующим формулам:

$y_{i+1} = y_i + h\cdot f(y_i, t_i)$, i = 1, 2, ... n,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_k + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{13}$$

где $k_1 = f(y_i, t_i)$; $k_2 = f(y_i + \frac{hk_1}{2}, t_i + \frac{h}{2})$;

$k_3 = f(y_i + \frac{hk_2}{2}, t_i + \frac{h}{2})$;

$k_4 = f(y_i + h k_3, t_i + h)$;

Для оценки погрешности метода часто используют правило Рунге. Для этого проводят вычисления с шагом h и с шагом h/2. Если полученные значения отличаются в пределах допустимой погрешности, то шаг удваивают, в противном случае берут половинный шаг.

Фрагмент программы на языке Бейсик, реализующий метод Рунге-Кутта, приведен в приложении Б.

Методы обработки экспериментальных данных

Методы оценки экспериментальных данных используют для выявления закономерностей и изучения поведения объектов. Они служат основой для построения математических моделей реальных объектов.

При обработке данных в автоматике, измерительной технике, теории надежности возникает необходимость оценить характеристики случайной величины.

Основными характеристиками являются математическое ожидание, дисперсия, доверительная вероятность и доверительный интервал.

Часто при анализе эмпирических данных, возникает необходимость установить функциональную зависимость между величинами *x* и *y,* полученными в результате измерения. Такая задача является задачей аппроксимации.

Например, функция $y=f(x)$ задана в виде таблицы (x_i, y_i), i = 1, 2 … n. Требуется аппроксимировать ее многочленом заданной степени k.

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} p_i x_i^k \tag{14}$$

где p_i — коэффициенты многочлена.

Для решения этой задачи широко применяется метод наименьших квадратов. Согласно этому методу коэффициенты многочлена выбирают так, чтобы сумма квадратов отклонений найденного многочлена от заданных значений функции была минимальной.

Значит требуется найти такой полином $P(x)$, чтобы соотношение

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_1 - P(x_i))^2 \tag{15}$$

было минимальным. Как известно из курса математического анализа, минимуму функции S соответствует нулевое значение частной производной по каждому коэффициенту.

В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных p_o, p_i, p_i, … $p_к$. И решая ее, находим коэффициенты аппроксимирующего полинома.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Для тех случаев, когда натурный эксперимент дорог или невозможен, широко применяется вычислительный или имитационный эксперимент, то есть проведение расчетов на математической модели. Имитационный эксперимент весьма важен при проектировании технических устройств. Алгоритмы и программы для проведения вычислительного эксперимента являются обязательной и существенной частью систем автоматизированного проектирования (САПР).

Для того, чтобы получить достоверные результаты при статистических испытаниях необходимо провести большое число экспериментов при случайном сочетании условий или факторов.

Если же мы имеем возможность сами выбрать желаемые сочетания факторов, то число экспериментов можно значительно уменьшить.

Это относится как к натурным, так и к имитационным экспериментам. Математическая дисциплина, занимающаяся наилучшим выбором сочетаний исследуемых факторов для проведения экспериментов, получила название математической теории планирования эксперимента.

Простейшими планами эксперимента являются полные и дробные факторные планы. Полный факторный план для двух факторов x_1 и x_2 задается таблицей 1.

Таблица 1 - Полный факторный план для двух факторов

Номер испытания	Значения факторов	
	x_1	x_2
1	+	-
2	+	+
3	-	+
4	-	-

В таблице “+” обозначены максимальные значения факторов, “—” их минимальные значения.

Как видно из таблицы 1, для того, чтобы исследовать влияние двух факторов на некоторую функцию цели достаточно провести четыре испытания при всех возможных сочетаниях факторов.

Обычно для контроля проводят еще испытания при средних значениях факторов.

По полученным данным строят аппроксимирующий полином и проверяют его адекватность по статистическим критериям.

Полученный полином является математической моделью влияния рассматриваемых факторов на объект. Им можно воспользоваться для поиска наилучшего сочетания факторов. Задача поиска наилучшего в некотором смысле сочетания факторов называется задачей оптимизации объекта. При этом условием или критерием оптимизации может быть минимум или максимум функции цели, например, минимум энергопотребления, минимум стоимости, максимум производительности и т. д.

В общем случае может быть несколько критериев, в том числе и противоречивых.

Для поиска оптимума служат специальные численные методы, такие, как метод золотого сечения, метод градиентного спуска, метод симплексного планирования и ряд других.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ
И УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

Решение задач лабораторной работы должно сопровождаться краткими теоретическими пояснениями с приведением размерностей рассчитываемых величин.

Блок-схемы алгоритмов должны вычерчиваться аккуратно с помощью чертежных принадлежностей.

Перед проработкой программы следует привести таблицу соответствия обозначений физических величин в модели, именам переменных в программе.

Каждый обучающийся получает индивидуальное задание, вариант задания выбирается по последней цифре шифра студенческого билета (или зачётной книжки).

Первая задача выполняется по таблице 3, вариант схемы выбирается по таблице 2.

Вторая задача выполняется по таблице 4, при этом обучающийся самостоятельно предлагает вариант примера рассматриваемого динамического процесса, принимает числовые значения констант (от 1 до 9), комментирует процесс решения графически и аналитически.

Третья задача. Вариант задачи также формируется обучающимся самостоятельно исходя из профессиональной деятельности, специальности и полученных знаний при изучении специальных дисциплин. Данные таблиц 5-8 могут носить лишь ориентировочный характер.

Стандартные подпрограммы численных методов могут быть взяты из рекомендованного списка источников литературы [2; 8; 9] или из приложения Б настоящих методических указаний.

Задача 1 .

Разработать математическую модель, алгоритмы и использовать необходимую программу для расчета электрической цепи постоянного тока по заданной схеме.

Методические рекомендации

Расчет электрической цепи постоянного тока состоит в определении неизвестных токов в ветвях.

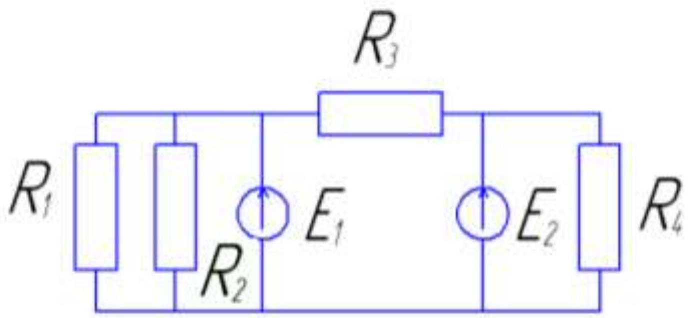
Решение может быть проведено одним из трех способов:

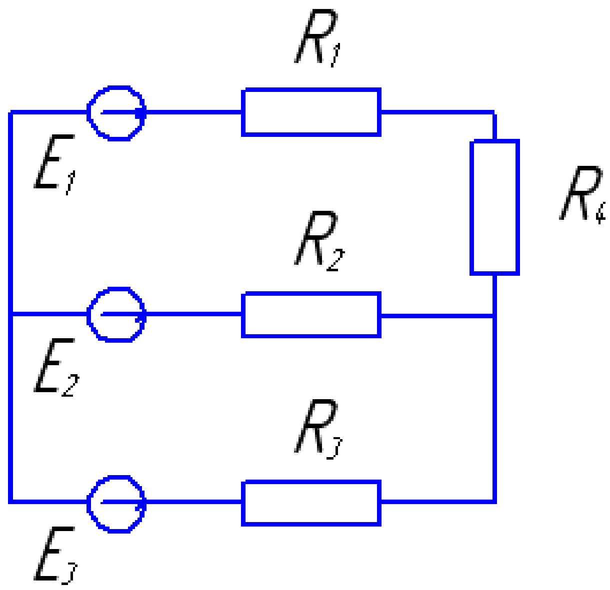
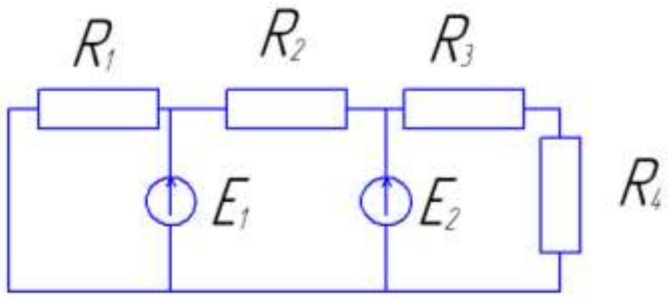
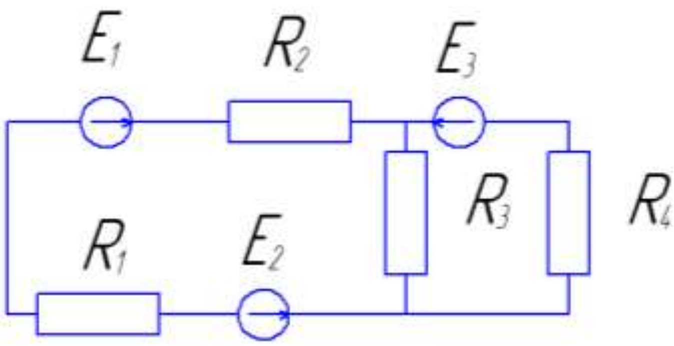
1) по законам Кирхгофа;

2) методом контурных токов;

3) методом узловых потенциалов.

Таблица 2- Данные к задаче 1

Номер схемы	Схема к задаче 1
1	

2	
3	
4	

Последовательность решения задачи

1. Составить систему линейных уравнений относительно неизвестных токов.

2. Разработать алгоритм решения, предусмотрев в нем ввод исходных данных, вызов стандартной или собственной подпрограммы численного решения системы уравнений и вывод полученных результатов.

3. Применить программу, реализующую алгоритм на языке программирования высокого уровня, например на Бейсике. При этом следует обратить внимание на:

- вызов подпрограммы численного решения и передачу ей параметров;
- наглядность и удобство ввода и вывода данных.

Текст стандартной подпрограммы следует привести в решении и прокомментировать.

Задача 2.

Разработать математическую модель, алгоритм и использовать программу для расчета угловой скорости механизма по заданному моменту на валу *M* и моменту нагрузки *M*нагр.

Методические рекомендации

До начала рассматриваемого процесса механизм неподвижен. Рассматриваемый переходный процесс описывается уравнением движения:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M - M_{нагр.}$$

Необходимо подставить в уравнение выражения для M и $M_{нагр,}$, соответствующие варианту, и выразить из уравнения производную угловой скорости.

Дальнейшее решение повторяет действия 2 и 3 первой задачи, с той разницей, что вместо подпрограммы решения системы линейных уравнений следует использовать подпрограмму численного решения дифференциального уравнения.

Таблица 3

Данные к задаче 2

Вариант	***M(t)***	***M*нагр.*(t)***
0	$M = M_0 e^{-t}/^T$	$M_{нагр.} = \beta\omega$
1	$M = M_0 e^{-t}/^T$	$M_{нагр.} = \beta\omega^2$
2	$M = M_0 e^{-t}/^T$	$M_{нагр.} = \mathrm{const}$
3	$M = M_0 e^{-t}/^T$	$M_{нагр.} = M_{ср.} + \Delta M \sin \omega_м t$
4	$M = M_0 e^{-t}/^T$	$M_{нагр.} = M_{ср.} + \Delta M \cos \omega_м t$
5	$M = \mathrm{const}$	$M_{нагр.} = \beta\omega$

6	M = const	$M_{нагр.} = \beta\omega^2$
7	M = const	$M_{нагр.}$ = const
8	M = const	$M_{нагр.} = M_{ср.} + \Delta M \sin \omega_м t$
9	M = const	$M_{нагр.} = M_{ср.} + \Delta M \cos \omega_м t$

Задача 3.1- для специальностей -“Механизация сельского хозяйства”, “Технология обслуживания и ремонта машин в АПК”.

Задача 3.2 - для специальностей -“Механизация переработки сельскохозяйственной продукции”, “Технология продуктов общественного питания”.

Задача 3.3 предусмотрена для всех специальностей.

3.1. Задача об использовании ресурсов

Общая постановка

Для изготовления **n** видов продукции $\mathbf{P_1,\ldots, P_n}$ предприятие использует **m** видов ресурсов $\mathbf{S_1, \ldots, S_m}$ (сырьё, топливо, материалы и т. д.).

Запасы ресурсов каждого вида ограничены и равны $\mathbf{b_1, \ldots, b_m}$.

На изготовление единицы продукции **j**-го вида **(j=1, …,n)** расходуется $\mathbf{a_{ij}}$ единиц **i**-го ресурса **(i = 1,…, n).**

При реализации единицы **j**-й продукции предприятие получает $\mathbf{C_j}$ единиц прибыли.

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

Пример: (ориентировочный его не переписывать! При выполнении вариантного задания студент формулирует задачу самостоятельно исходя из требований профессиональной деятельности.)

АО “КВАНТ” производит 3 вида продукции: спальный гарнитур “КОМФОРТ”, кухонный гарнитур “УЮТ”, мягкую мебель “ОТДЫХ”. При этом использует 4 вида ресурсов: ламинат - (облицованная пластиком

ДСП), конферматы - (шурупы-саморезы), гобелен - (мебельная ткань), поролон.

Запасы ресурсов составляют: ламината - 25 м^2, конферматов - 14 комплектов, гобелена – 19 рулонов, поролона – 24 м^2.

На изготовление одного спального гарнитура расходуется: ламината – 2 м^2, конферматов –1 комплект, гобелена –1 рулон, поролона–3 м^2. Для кухонного гарнитура и мягкой мебели данные в таблице 4.

При реализации гарнитура “КОМФОРТ” АО “КВАНТ” получает прибыль 600 рублей, гарнитура “УЮТ”-550 рублей, мебели “ОТДЫХ” -750 РУБЛЕЙ.

Требуется составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации АО “ КВАНТ” получило максимальную прибыль.

Таблица 4-**Варианты задач об использовании ресурсов**

Вариант	**Виды ресурсов**	**Расход ресурсов на единицу продукции**			**Запасы ресурсов**	**Доход от реализации единицы продукции**		
		P_1	**P_2**	**P_3**		**C_{p1}**	**C_{p2}**	**C_{p3}**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	S_1	2	1	1	25			
	S_2	1	1	1	14			
	S_3	1	4	2	19	600	550	750
	S_4	3	0	1	24			
2	S_1	2	5	-	300			
	S_2	4	5	-	400			
	S_3	3	0	-	100	5	8	-
	S_4	0	4	-	200			
3	S_1	2	5	-	20			
	S_2	8	5	-	40	50	40	-
	S_3	5	6	-	30			
4	S_1	2	3	-	19			
	S_2	2	1	-	13			
	S_3	0	3	-	15	7	5	-
	S_4	3	0	-	18			
5	S_1	4	2	1	150000			
	S_2	6	0	2	170000			
	S_3	0	2	4	100000	100	150	200
	S_4	8	7	0	200000			

3.2. Задача о смесях

К этому типу относятся разнообразные задачи на составление рациона питания, смесей из нескольких компонентов (продуктов, материалов и т.п.) для получения конечного продукта с заданными свойствами. В математическом плане к этому виду относятся также некоторые задачи планирования производства. Рассмотрим формулировку задачи о смеси.

Имеется $\boldsymbol{n}$ продуктов $\boldsymbol{P_1,\dots,P_n}$, содержащих $\boldsymbol{m}$ питательных веществ $\boldsymbol{S_1,\dots, S_m}$. Пусть $\boldsymbol{a_{ij}}$, $\boldsymbol{i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m}$, - количество единиц $\boldsymbol{j}$-го питательного вещества в единице $\boldsymbol{j}$-го продукта; $\boldsymbol{b_j}$ – суточная потребность (минимальная норма) организма в $\boldsymbol{j}$-м питательном веществе; $\boldsymbol{C_1}$ – стоимость единицы $\boldsymbol{i}$-го продукта.

Требуется выбрать такой суточный рацион питания (т.е. назначить количество продуктов $\boldsymbol{P_{1,\dots}}$ $\boldsymbol{P_n}$, входящих в него), чтобы условия по питательным веществам были выполнены, а стоимость рациона была минимальной. Варианты данных задачи приведены в таблице 5.

Таблица 5. –Данные к задаче о смесях

Вариант	**Виды питательных веществ**	**Количество единиц питательных веществ в единице продукции**				**Минимальная норма питательных веществ**	**Стоимость единицы продукта**			
		P_1	**P_2**	**P_3**	**P_4**		**C_{P1}**	**C_{P2}**	**C_{P3}**	**C_{P4}**
1	S_1	3	1	-	-	9				
	S_2	1	2	-	-	8	4	6	-	-
	S_3	1	6	-	-	12				
2	S_1	1.2	1.4	0.8	-	1.6				
	S_2	80	280	240	-	200	3	4	5	-
	S_3	5	5	100	-	10				
3	S_1	26.5	7.8	0	0	21				
	S_2	51	26	45.7	0	30	14.4	16	12.8	10
	S_3	0	0	5	72.5	500				
	S_1	1	5	-	-	10				
	S_2	3	2	-	-	12				
4	S_3	2	4	-	-	16	2	3	-	-
	S_4	2	2	-	-	10				
	S_5	1	0	-	-	15				
	S_1	0.18	0.24	1.2	-	12				
5	S_2	10	8	200	-	1000	1	1.1	7.5	-
	S_3	15	1	1.5	-	450				

3.3. Задача о загрузке оборудования

Рассмотрим две постановки этой задачи.

1. Предприятие выпускает $\boldsymbol{n}$ видов изделий $\boldsymbol{P_1,\dots,P_n}$, каждое из которых проходит последовательную обработку на станках типов $\boldsymbol{T_1,\dots, T_m}$. Запас мощности станков, т.е. рабочее время станка, составляет соответственно $\boldsymbol{b_{1,\dots,} b_m}$ единиц времени. Изделие $\boldsymbol{P_i}$ обрабатывается первым станком (типа $\boldsymbol{T_1}$) $\boldsymbol{a_{i1}}$ единиц времени, вторым станком – $\boldsymbol{a_{i2}}$ единиц времени и т.д. При реализации одно изделие $\boldsymbol{P_i}$ приносит предприятию $\boldsymbol{C_i}$ единиц прибыли ($\boldsymbol{i = 1,\dots, n}$). Составить такой план загрузки станков, при котором предприятие получит максимальную прибыль. Конкретные числовые данные приведены в таблице 6.

2. Предприятию необходимо выпустить $\boldsymbol{n}$ видов изделий $\boldsymbol{P_1,\dots, P_n}$ в количествах соответственно $\boldsymbol{N_1,\dots, N_n}$ единиц. Для этой цели используются $\boldsymbol{m}$ типов станков $\boldsymbol{T_1,\dots, T_m}$, каждый из которых может обрабатывать все изделия $\boldsymbol{P_i}$, $\boldsymbol{i = 1,\dots, n}$. Производительность каждого станка (количество изделий, обрабатываемых в единицу времени) имеет величину $\boldsymbol{a_{ij}}$, $\boldsymbol{i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots, m}$. Запас мощности станков (рабочее время станка) составляет соответственно $\boldsymbol{b_1,\dots, b_m}$ единиц времени . составить такой план загрузки станков, при котором себестоимость выпуска продукции будет минимальной. Ориентировочные числовые данные приведены в таблице 7.

Таблица 6- **Первый вариант задачи о загрузке оборудования**

Вариант	**Типы стан-ков**	**Продолжительность обработки изделия на станке**			**Доход от реализации изделия**			**Запас мощ-ности станков**
		$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	$\boldsymbol{P_3}$	$\boldsymbol{C_{p1}}$	$\boldsymbol{C_{p2}}$	$\boldsymbol{C_{p3}}$	
1	T_1	12	10	9				13200
	T_2	15	18	20	30	32	29	24000
	T_3	6	4	4				6000
2	T_1	2	5					50
	T_2	2	1					20
	T_3	5	6		10	12		60
	T_4	1	10					90
	T_1	3	8	4				6048

3	T_2	2	3	2	16	25	20	6048
	T_3	7	9	5				3932
4	T_1	2	3					20
	T_2	3	1		11	9		37
	T_3	0	1					30
5	T_1	2	0					20
	T_2	1	2		6	8		37
	T_3	1	4					30

Таблица 7- **Второй вариант задачи о загрузке оборудования**

Вариант	**Типы станков**	**Производительность станков**				**Себестоимость продукции**				**План выпуска продукции**				**Запас мощности станков**
		P_1	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**C_{p1}**	**C_{p2}**	**C_{p3}**	**C_{p4}**	**N_{p1}**	**N_{p2}**	**N_{p3}**	**N_{p4}**	
1	T_1	30	20			6	12							120
	T_2	20	14			8	10			4000	3000			100
	T_3	15	25			11	7							160
2	T_1	6	24			4	47							6
	T_2	13	13			13	26			30	96			6
3	T_1	30	50	30	20	2	1	0.5	1.2					240
	T_2	60	100	60	40	0.8	1.2	0.9	0.8	3	15	4.5	1.5	150
	T_3	18	30	18	12	0.5	1	0.6	0.9					150
4	T_1	8	4	2		4	6	3						60
	T_2	4	2	1		5	4	2		160	100	100		70
5	T_1	5	10	20		6	3	1.5						40
	T_2	1.7	3.3	5		6	3	2		300	500	100		60
	T_3	5	10	2.5		4	2	8						30

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988.
2. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. – М: Наука, 1995.
3. Дьяконов В.П. Системы символьной математики. – М: Наука, 1998.
4. Дьяконов В.П. Справочник по MATCAD PLUS 10.0 Универсальная система математических расчётов. – М: Наука, 2008.
5. Дьяконов В.П. Справочник по системе символьной математики DERIVE. – М: Наука, 1998.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1983.
7. Мельникова О.И. Банюшкина А.Ю. Начала программирования на языке QBASIC. – М.: Эком, 1990.
8. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М: Наука, 2005.
9. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – М: Наука, 2004.
10. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М: Наука, 2005.
11. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. – М: Наука, 2004.
12. Лебедев А.Н. Моделирование в научно- технических исследованиях. – М: Наука, 2007.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

ОСНОВНЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ

1. Пакеты, реализующие численные методы решения различных математических задач, применяются во многих областях науки и техники. Специализациями пакетов этого назначения могут быть, например, решения уравнений с частными производными или решения уравнений гидродинамики, а спецификой — повышенная точность вычислений или широкое использование графопостроителя (принтера, плоттера) для вывода результатов.

2. Пакеты для выполнения аналитических вычислений используются в основном в физике и математике. Результатом решения задачи с помощью пакета класса служит функция, записанная в аналитическом виде, а не в виде таблицы значений, вычисленных с некоторой погрешностью. Возможная специализация — расчет траекторий положений материальных точек механизмов технических устройств и аппаратов, специфика — использование полиномов Чебышева.

3. Пакеты для статистического анализа данных применяют для обработки данных, измеренных в результате какого-либо эксперимента, в самых различных областях науки и техники. Возможные специализации: элементарная статистика, восстановление регрессионных зависимостей, случайные процессы. Специфика — малые выборки, печать результатов в виде стандартных отчетов и статей.

4. Пакеты для обработки данных, полученных на ускорителях элементарных частиц среди миллионов событий, зарегистрированных в эксперименте на ускорителе и записанных на носитель.

5. Пакеты для расчета объемных конфигураций молекул находят применение в химии, физике и молекулярной биологии для определения свойств исследуемых или синтезируемых веществ.

6. Пакеты для анализа данных социологических исследований применяются для обработки большого количества анкет, собранных в социологическом эксперименте.

7. Пакеты, моделирующие поведение сложных систем, используются в экономике, метеорологии, экологии для изучения поведения и прогнозирования, соответственно, экономических, климатических и экологических факторов.

8. Пакеты для обработки медико-биологических данных. Возможные специализации: выделение групп риска, автоматизация профилактических осмотров населения, прогноз активности медицинских препаратов.

9. Информационно-поисковые системы позволяют хранить, изменять и использовать большие объемы сложноорганизованной информации.

10. Автоматизированные системы управления обеспечивают эффективное и оперативное управление разнообразными техническими и технологическими процессами.

11. Пакеты для программирования различных технологических устройств используются в технике при составлении программ для станков с числовым управлением, для оптимального лазерного раскроя металла, материалов, ткани, монтажа печатных плат и т. п.

12. Пакеты для автоматизации проектных работ (ПАПР) используются для ведения проектной документации, в частности, для составления и корректирования схем, чертежей, эскизов в различных конструкторских организациях.

13. Пакеты для обработки текстов и изображений могут быть использованы для автоматического набора тестов в типографиях, для видеомонтажа и мультипликации на телевидении и киностудиях.

14. Пакеты обучающих программ и пакеты-тренажеры применяются для обучения и оценки уровня знаний школьников, студентов и специалистов, повышающих квалификацию. Пакеты-тренажеры используются для выработки заданных профессиональных навыков.

15. Пакеты программ, предназначенные для развлечения и отдыха. Возможные специализации: игры для детей и взрослых, вырабатывающие заданные качества (быструю реакцию, предприимчивость); программы, с помощью которых можно рисовать на экране цветного монитора или сочинить музыку, воспроизводимую компьютером.

ПОДПРОГРАММЫ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

```
100 REM ПОДПРОГРАММА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИИ
110 REM МЕТОД ЖОРДАНА—ГАУССА
120 REM A(N, N+1) МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ, X(N) МАТРИЦА НЕИЗВЕСТНЫХ
130 REM N — ЧИСЛО УРАВНЕНИИ
140 REM СТОЛБЕЦ N+1 — ПРАВЫЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЙ
150 FOR I=1 TO N
160 FOR J=l TO N
170 IF J=l THEN 190
180 M=A (J, I) /A (I, I)
190 FOR K=1 TO N+1
200 A(J, K)=A(J, K)—M∗A (I, К)
210 NEXT К
220 NEXT J
230 NEXT I
240 FOR I=1 TO N
250 X(I)=A(1, N+1)/A(I, I)
260 NEXT I
270 RETURN
```

```
100 REM ПОДПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ПО МЕТОДУ ЭЙЛЕРА
110 REM ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
120 REM ШАГ РАСЧЕТА — Н
130 REM УРАВНЕНИЕ ЗАДАЕТСЯ ОПЕРАТОРОМ DEF FND...
140 REM ПОДПРОГРАММА ВЫЗЫВАЕТСЯ НА КАЖДОМ ШАГЕ
150 F=FND (X, Y)
160 Y=Y+H∗F
170     X=X+H
180     RETURN
```

```
100     REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО МЕТОДУ РУНГЕ-КУТТА
110     REM С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ
120     REM ШАГ — Н, НАЧ. УСЛОВИЯ ДЛЯ X, Y — R, Q
130     REM МАКСИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ X—M
140     REM РЕШАЕМОЕ УРАВНЕНИЕ СЛЕДУЕТ ЗАДАТЬ С ПОМОЩЬЮ
150     REM ОПЕРАТОРА DEF FND (X, Y)=....
160     L=INT ((M—R)/H)
170     DIM X(L+1), Y(L+1)
180     I=0
190     X(0)=R
200     Y(0)=Q
210     PRINT “ШАГ X Y=F(X)”
220     PRINT TAB (2); 1; TAB (10);
230     PRINT USING “∗∗∗∗∗,∗∗∗∗∗”:X(I);
240     PRINT TAB (23)
250     PRINT USING “∗∗∗∗∗,∗∗∗∗∗”: Y(l)
260     X(I+1)=X(1)+H
270     IF X(I+I)>|M THEN 350
280     K=FND (X(l), Y(I))
290     Kl=FND(X(I)+0,5∗H,Y(I)+0,5∗H∗K)
300     K2= FND(X(I)+0,5∗H,Y(I)+0,5∗H∗K1)
310     K3=FND(X(1)+H, Y(1)+H∗K2)
320     Y(I+1)=Y(I)+(H/6)∗(K+2∗K1+2∗K2+K3)
330     I = I + 1
340     GOTO 220
350     RETURN
```